Colles Bossuet

KPAKPO Kévin

22/05/2018

GILIBERT

Exercice 1 : un endomorphisme conservant le signe

On considère ici l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et l'endomorphisme u qui au polynôme P associe le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$.

1. Vérifier que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, l'image $u(P)$ de P par u admet bien un sens puis que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ montrer qu'il en est de même de $Q = u(P)$.

DE THOMASSIN

Exercice 2[1]

Soit T l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $T(M) = {}^{\mathrm{t}}M$. Calculer tr T et det T.

Exercice 3

Soit f un endomorphisme de'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que Ker f soit de dimension finie. Montrer que, quel que soit $n \geq 1$, Ker f^n est de dimension finie.

EL JANATI

Exercice 4: exponentier deux fois? Maintenant on peut [2]

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle $\mathscr{P}$ la propriété

$$f \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ et } f \circ f = \exp$$

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f satisfaisant la propriété $\mathscr{P}$ et de plus, telle que

$$\forall x \in [0, 1/2], f(x) = x + 1/2$$

2. Soit f satisfaisant $\mathscr{P}$.
   (a) Montrer que f est strictement monotone, qu'elle n'a aucun point fixe puis qu'elle croît
   (b) Montrer que, si l'on pose $a = f(0)$, on a alors $0 < a < 1$ et $f([0, a]) = [a, 1]$.
   (c) Montrer que l'image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de la forme $]l, +\infty$, avec $l < 0$.

GUENOUNNI

Exercice 5: une équation fonctionnelle

On désigne par F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\mathrm{e}^x - x$.

[1] Source: Les clefs pour l'X

[2] Source: Le jardin d'Eiden : Une année de colles en Math Spé MP

1. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissante et telle que $F \circ \phi = F$. On ne chercher pas à exprimer $\phi(x)$ en fonction de x.
   (b) Comparer les valeurs $F(-x)$ et $F(x)$ pour x réel et en déduire que $|\phi(x)| < |x|$ pour tout $x \leq 0$
2. Montrer que ϕ est une involution continue de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
3. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ et concave.
4. Déterminer des équivalents simples de $\phi(x)$ lorsque $x \to +\infty$ puis lorsque $x \to -\infty$. Donner l'allure du graphe de ϕ.

VIGNON

Exercice 6: quand M commute avec M'

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur > 0 et une application M de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, de la forme:

$$x \in I \to M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$$

1. (a) On suppose dans cette question que $M(x)$ et $M'(x)$ commutent pour tout x et que la fonction b ne s'annule pas. Que dire alors des fonctions c/b et $(d-a)/b$?
   (b) Montrez, en l'explicitant, qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in I, M(x) \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$. Montrer que les matrices $M(x)$ et $M(x')$ commutent pour tout couple (x, x').
2. Soit A une matrice non scalaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que (X_0, AX_0) soit une base de $\mathbb{R}^2$

   On suppose X_0 ainsi choisi. Si $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, il existe donc un couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $BX_0 = u_0X_0 + v_0AX_0$. Montrer que si la matrice B commute avec A, on a $B = u_0I_2 + v_0A$.
3. On suppose dans cette question que $M(x)$ et $M'(x)$ commutent pour tout $x \in I$ et que $M(x)$ n'est une matrice scalaire pour aucun x.
   (a) Montrer qu'il existe alors un unique couple (u, v) d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ tel que $M'(x) = u(x)I_2 + v(x)M(x)$ pour tout $x \in I$
   (b) Pour $x_0 \in I$ donné, on pose $C(x) = M(x)M(x_0) - M(x_0)M(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que C satisfait une équation différentielle très simple, dans laquelle intervient la fonction v, puis la résoudre en la ramenant par exemple à des équations différentielles scalaires. En conclure que $M(x)$ et $M'(x)$ commutent pour tout couple (x, x').
4. Réciproquement, on suppose que M est une application dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(x)$ et $M(x')$ commutent quels que soient x et x' dans I. Montrer alors que $M(x)$ et $M'(x)$ commutent pour tout $x \in I$.